論文の内容の要旨

論文題目

Two-component soliton systems and the Painlevé equations (２成分ソリトン系とパンルヴェ方程式)

氏　　名　村田　実貴生

P. Painlevé は２階常微分方程式について研究し，動く特異点が極に限るような方程式を探した．この性質はパンルヴェ性として知られている．そしてパンルヴェ方程式として知られる６種の新たな方程式を発見した．

パンルヴェ方程式は線型微分方程式のモノドロミー保存変形の問題に現れる．R. Fuchs は４個の確定特異点を持つ２階線型微分方程式を考察した．そして彼はモノドロミーが特異点の位置と独立であるような解の基本系を線型微分方程式が有する条件をパンルヴェ６型方程式 ($\mathrm{P_{VI}}$) が記述することを証明した．R. Garnier により得られた結果は不確定特異点を持つ２階線型微分方程式のモノドロミー保存変形と関連する．彼は他の５種のパンルヴェ方程式 ($\mathrm{P_{I}}$, $\mathrm{P_{II}}$, $\mathrm{P_{III}}$, $\mathrm{P_{IV}}$, $\mathrm{P_{V}}$) が線型微分方程式の拡大系の完全積分可能条件から得られることを示した．L. Schlesinger は確定特異点を持つ１階微分方程式の線型系のモノドロミー保存変形を考察し，非線形微分方程式の完全積分系を得た．M. Jimbo, T. Miwa と K. Ueno は確定または不確定特異点を持つ１階線型常微分方程式の行列系のモノドロミー保存変形の一般論を構築した．そして M. Jimbo と T. Miwa は変形の条件が各パンルヴェ方程式で与えられるような 2×2 行列型の線形方程式系を提出した．それらはパンルヴェ方程式のラックス対と呼ばれている．

パンルヴェ方程式はソリトン方程式の研究でも扱われる．その背後には等モノドロミー変形と等スペクトル変形の関係がある．M. Jimbo と T. Miwa は τ 関数の概念を用いて等スペクトル変形から等モノドロミー変形を矛盾なく得られる手順を述べた．その手順に従えば，パンルヴェ方程式自身だけでなく，そのラックス

対も得ることができる．P_{III} 及び P_{IV} がそれぞれ Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式と非線型 Schrödinger 方程式から簡約を通して得られた．

我々はパンルヴェ方程式のラックス対を直接得ることができる等スペクトル変形を探すことを目的とする．特に，2×2 行列型の線型系の特異点の型はパンルヴェ方程式の型と対応するので，我々は 2×2 行列型の線型系を扱う．それより大きいサイズの行列型の線型系とパンルヴェ方程式とのそのような対応を見出すのは困難である．また反自己双対 Yang-Mills 方程式の常微分方程式への簡約はパンルヴェ方程式を導出する．そのとき，反自己双対 Yang-Mills 方程式の 2×2 行列型の線型系もパンルヴェ方程式のラックス対に簡約される．よって多くの研究者がパンルヴェ方程式の研究のために 2×2 行列型のラックス対を扱った．我々はソリトン方程式の性質とパンルヴェ方程式の性質を関係付けることで，パンルヴェ方程式を研究することを目指す．そのような取り組みの基盤を構築するために，我々はホロノミック変形を佐藤理論を用いて定式化することを試みる．

本論文では，P_{VI} の 2×2 行列型のラックス対を与える無限次元可積分階層を提案する．この階層は２成分ＫＰ階層の時間変数に依存するようなスペクトル変数を用いた拡張である．拡張とは導入した時間変数と独立であるように制限した階層は通常の２成分ＫＰ階層に等しいことを意味する．我々はこの拡張した階層を佐藤-Wilson 形式を用いて定式化する．この定式化で我々は線型系の標準的な解である波動関数を巧妙に定義する．この波動関数はガウスの超幾何積分の被積分関数に類似している．

その後に，我々はホロノミック変形を等スペクトル変形と同様に考察する．拡張された階層の波動関数を用いてスペクトル変数に関する線型微分方程式系を構成する．佐藤-Wilson 形式では階層の規則は佐藤-Wilson 作用素についての佐藤方程式で与えられる．我々は変形を有する線型系の条件をスペクトル変数に関する佐藤方程式で与える．我々はこの線型系の完全積分可能条件を記述する系を得る．この無限次元系を１次元系に簡約し，その系から P_{VI} が導出されることを示す．

また，我々は通常の２成分ＫＰ階層から他のパンルヴェ方程式を扱う統一的な方法を示す．各項で我々は異なる波動関数を定義する．この定義は２成分ＫＰ階層には影響を及ぼさないが，ホロノミック変形には影響を及ぼす．すなわち，スペクトル変数に関する異なる佐藤方程式が定義される．各波動関数を用いてスペクトル変数に関する線型微分方程式系を構成する．この線型系の完全積分可能条件を記述する系を得る．この無限次元系を１次元系に簡約し，その系から各パンルヴェ方程式が導出されることを示す．このことから非線型 Schrödinger 方程式の簡約で P_{IV} だけでなく新たに P_{V} や P_{III} が得られることが分かる．

第２節では，２成分ＫＰ階層の拡張を佐藤-Wilson 形式を用いて構成する．第３節では，その拡張された階層をもとにホロノミック変形を考察しその変形条件を記述する系を得る．その系から P_{VI} が導出されることを示す．第４節では，通常の２成分ＫＰ階層を含むようなホロノミック変形を調べ，その変形の条件を記述する系から各パンルヴェ方程式，P_{V}, P_{IV}, P_{III} および P_{II} が導出されることを示す．

以下では，拡張された２成分ＫＰ階層から P_{VI} が導出される過程の概略を示す．

佐藤-Wilson 作用素を

$$\mathcal{W} = I + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \partial_x^{-k} \quad (w_k \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}),\ \partial_x w_k = 0)$$

とする．微分作用素

$$\mathcal{M} = -\gamma\partial_x + x\partial_x^2 + \sigma_3\left(-c\partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \partial_x^{n+1}\right), \quad \left(\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right),$$

$$\mathcal{B} = \left(\mathcal{W}\mathcal{M}\mathcal{W}^{-1}\right)_+ = -\sum_{k=0}^{\infty} R_k \partial_x^k,$$

$$\mathcal{B}_n = \left(\mathcal{W}\sigma_3\partial_x^n\mathcal{W}^{-1}\right)_+ = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k}\partial_x^k + \sigma_3\partial_x^n \quad (n \geq 1)$$

を定義し，差分作用素の係数を用いて定義される行列作用素

$$W = I + \sum_{k=1}^{\infty} w_k (\lambda - t)^k,$$

$$M = I\left(-\frac{\gamma}{\lambda - t} + \frac{x}{(\lambda - t)^2}\right) + \sigma_3\left(-\frac{c}{\lambda - t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n t_n}{(\lambda - t)^{n+1}}\right),$$

$$B = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_k}{(\lambda - t)^k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_{n-k}}{(\lambda - t)^k} + \frac{\sigma_3}{(\lambda - t)^n} \quad (n \geq 1)$$

が佐藤方程式

$$\partial_t W = BW - WM, \quad \partial_{t_n} W = B_n W - W\frac{\sigma_3}{(\lambda - t)^n} \quad (n \geq 1)$$

を満たすことを要請する．波動関数を

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda) = W\lambda^{\alpha}(\lambda - 1)^{\beta}(\lambda - t)^{\gamma}\exp\left(\frac{x}{\lambda - t}\right) \\ \times \mathrm{diag}\Bigg\{\lambda^{a}(\lambda - 1)^{b}(\lambda - t)^{c}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{(\lambda - t)^n}\right), \\ \lambda^{-a}(\lambda - 1)^{-b}(\lambda - t)^{-c}\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{(\lambda - t)^n}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

と定義する．このとき次の定理が成り立つ．

定理１　もし行列作用素 W が佐藤方程式を満たせば，波動関数 $\Psi(\lambda)$ は次の線型方程式系を満たす．

$$e^{\partial_s}\Psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - t}\Psi(\lambda), \quad \partial_t\Psi(\lambda) = B\Psi(\lambda), \quad \partial_{t_n}\Psi(\lambda) = B_n\Psi(\lambda) \quad (n \geq 1).$$

定理 2　もし行列作用素 W が佐藤方程式を満たせば，W から得られる行列作用素 B および B_n は次の Zakharov-Shabat 系を満たす．

$$\partial_t B_n - \partial_{t_n} B + [B_n, B] = 0 \ (n \geq 1), \quad \partial_{t_m} B_n - \partial_{t_n} B_m + [B_n, B_m] \ = 0 \ (n, m \geq 1).$$

微分作用素

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = I\Big(&\alpha\left\{1 + (t-1)\,\partial_x\right\} + \beta\,(1 + t\partial_x) + \gamma\left\{1 + (2t-1)\,\partial_x + t\,(t-1)\,\partial_x^2\right\} \\ &- x\left\{\partial_x + (2t-1)\partial_x^2 + t(t-1)\partial_x^3\right\}\Big) \\ &+ \sigma_3\Big(a\left\{1 + (t-1)\,\partial_x\right\} + b\,(1 + t\partial_x) \\ &+ c\left\{1 + (2t-1)\,\partial_x + t\,(t-1)\,\partial_x^2\right\} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} nt_n\left\{\partial_x^n + (2t-1)\,\partial_x^{n+1} + t\,(t-1)\,\partial_x^{n+2}\right\}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \partial_x^k,\end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \left(\mathcal{W}\mathcal{V}\mathcal{W}^{-1}\right)_+ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \partial_x^k$$

を定義し，この微分作用素の係数を用いて定義される行列作用素

$$S = \frac{\lambda - t}{\lambda(\lambda-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{(\lambda-t)^k} = \frac{a\alpha I + \sigma_3}{\lambda} + \frac{\beta I + b\sigma_3}{\lambda - 1} + \frac{\gamma I + c\sigma_3}{\lambda - t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt_n\sigma_3}{(\lambda-t)^{n+1}},$$

$$A = \frac{\lambda - t}{\lambda(\lambda-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda-t)^k} = \frac{P}{\lambda} + \frac{Q}{\lambda - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{(\lambda-t)^k}$$

が簡約条件の方程式

$$\partial_\lambda W = AW - WS$$

を満たすことを要請する．このとき次の定理が成り立つ．

定理 3　もし行列作用素 W が簡約条件の方程式を満たせば，波動関数 $\Psi(\lambda)$ は次の線型方程式を満たす．

$$\partial_\lambda \Psi(\lambda) = A\Psi(\lambda).$$

定理 4　もし行列作用素 W が佐藤方程式を満たせば，W から得られる行列作用素 A, B および B_n は次の Zakharov-Shabat 系を満たす．

$$\partial_t A - \partial_\lambda B + [A, B] = 0, \quad \partial_{t_n} A - \partial_\lambda B_n + [A, B_n] = 0 \quad (n \geq 1).$$

特に $t_n \equiv 0$ $(n \geq 1)$ と置くことで，この Zakharov-Shabat 系から

$$\partial_t P - \left[P, R_0 - \frac{R_1}{t}\right] = 0, \quad \partial_t Q - \left[Q, R_0 + \frac{R_1}{1-t}\right] = 0$$

を得る．この系からパンルヴェ 6 型方程式を導出することができる．